Análisis de Fourier: Aplicaciones para el cálculo de parámetros estadísticos

Rutilo Moreno Monsivais^{1*}, María de Jesús Sánchez López¹

¹Tecnológico Nacional de México/IT San Luis Potosí, Av. Tecnológico s/n, Soledad de Graciano Sánchez, San Luis Potosí, C.P. 78376, México.

*e-mail: rutilo.moreno@gmail.com

Resumen

En este trabajo se da una breve introducción a las transformadas, discreta y continua de Fourier y se muestra cómo es que estas se aplican en el campo de la probabilidad y la estadística para calcular algunos parámetros de distribuciones de variables aleatorias, ya sea que estas sean continuas o discretas.

Palabras clave: Transformada de Fourier, Distribución de Probabilidad, Momentos de una Distribución.

Abstract

In this paper we give a brief introduction to the transformations, discrete and continuous Fourier and shows how they are applied in the field of probability and statistics to calculate some parameters of random variable distributions, whether they are continuous or discrete.

Keywords: Fourier Transform, Probability Distribution, Moments of a Distribution.

4. Introducción

La historia moderna de lo que hoy se conoce como análisis de Fourier se remonta a mediados del siglo XVIII y el problema de la cuerda vibrante, hoy considerado como uno

de los más importantes de dicho siglo. Este fue propuesto por Brook Taylor en 1717 en su obra *Methodus incrementorum directa et inversa* [2] y consiste en plantear las ecuaciones que describen el movimiento de todo punto y para todo tiempo, de una cuerda flexible, fija en sus extremos, la cual se ha “estirado” hasta quedar tensa, y cuya curva se describe por una cierta función y posteriormente se suelta, en donde se asume que el movimiento que tendrán todos y cada uno de los puntos de dicha cuerda estará contenido en un plano.

Este problema atrajo la atención de muchos matemáticos de renombre de dicha época, entre ellos se pueden contar

Jean le Rond d'Alembert, Leonhard Paul Euler, Daniel Bernoulli, y otros pero no fue hasta 1807 que el matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier en su obra *Théorie Analytique de la Chaleur* [1] en la que ataca el problema de la propagación del calor en conductores sólidos bajo algunas ciertas restricciones y establece un método para darle solución inspirado por los trabajos de Daniel Bernoulli en el problema de la cuerda vibrante. Dicho método es hoy conocido como separación de variables, en el que la parte medular del mismo consiste en descomponer cualquier función periódica como una mezcla de funciones senoidales y cosenoidales de diferentes amplitudes y frecuencias.

Desde entonces a la fecha, son innumerables las áreas en las que el análisis de Fourier encuentra aplicaciones de manera natural, entre estas se encuentran: electrónica, teoría de números, medicina, astronomía, economía, mecánica cuántica, entre otras.

En el presente trabajo se presentan algunas aplicaciones de la transformada discreta y continua de Fourier en el campo de la probabilidad y la estadística para la obtención de los momentos de una distribución de probabilidad, los cuales están directamente relacionados con algunos parámetros relevantes de dicha distribución.

En la sección 2 de este trabajo se definen las transformadas de Fourier para el caso de funciones continuas y discretas.

El concepto de distribución de probabilidad, medular para la comprensión de este trabajo se trata en la tercera sección. En la cual también se definen algunos parámetros estadísticos, los momentos de una distribución y la relación existente entre los mismos.

La sección 4 trata de la relación entre la transformada de Fourier y su uso para obtener los momentos de distribuciones de variables aleatorias. Se establece dicha relación de manera general para el caso en que la función de distribución es continua y se tratan de manera general algunos casos que se pueden presentar cuando la variable aleatoria es discreta.

La notación utilizada es estándar y puede ser encontrada en los trabajos [3],[4],[5].

5. Transformadas continuas y discretas de Fourier

Dada una función real o compleja $f(x)$ definida sobre la línea y en donde es integrable en el sentido de Lebesgue, el cual obliga a la función en cuestión a tener ciertas propiedades de regularidad, su transformada de Fourier está definida por:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi uix} dx$$

De manera análoga, se define la transformada inversa de Fourier de la función $F(U)$ como:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{2\pi uix} du$$

Donde en ambas definiciones, i es la unidad imaginaria.

Esta forma de definir dichas transformadas no es única y dependiendo del área en la que se trabaje se realiza un cambio de variable lineal $u = ax$ para alguna constante a , que cambia la forma mas no la propiedad de que al realizar de manera sucesiva la transformada y la transformada inversa a una cierta función se regresa a ella misma.

Existe también la versión discreta de dichas transformadas cuando no se tiene una función continua $f(x)$ sino una colección de valores de dicha función correspondientes a un conjunto finito de valores igualmente espaciados en el eje x , a continuación se definen dichas transformadas de manera formal.

Dado un conjunto de N valores $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ reales o complejos, indexados por los primeros N enteros no negativos y que se corresponden con la secuencia creciente de N valores $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ reales igualmente espaciados entre sí. La transformada discreta de Fourier (TDF) asociada a la secuencia valores $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ está dada por:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n W_n^{kn}$$

donde:

$$W_N := e^{-\frac{2\pi i}{N}}$$

La cual cuando es evaluada en los enteros $0, 1, 2, \dots, N-1$ produce los valores $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ respectivamente.

De manera análoga dada la secuencia $Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1}$ se define la transformada discreta de Fourier inversa (TDFI) asociada a dicha secuencia como la función:

$$Y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k W_n^{-kn}$$

De manera análoga al caso continuo, este par de definiciones pueden tener ligeras variaciones dependiendo del área de aplicación, sin embargo la aplicación sucesiva de las transformadas discreta y discreta inversa de Fourier a una secuencia de valores, nos regresa, en este caso, una función periódica cuyo periodo es N , mezcla de funciones senoidales y cosenoidales, la cual, cuando es evaluada en la secuencia de enteros $0, 1, 2, \dots, N - 1$ produce los valores $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ respectivamente.

Dicha función periódica puede usarse para interpolar la función original en otros valores no enteros, donde la validez de dicha interpolación está regida por la naturaleza de la aplicación así como de ciertas propiedades de la secuencia dada.

6. Transformadas continuas y discretas de Fourier

Dada la realización de un experimento, se define una variable aleatoria X como una función que asigna un número real a cada uno de los resultados de dicho experimento. De manera formal se puede escribir:

$$X : A \rightarrow \mathbb{R}$$

Donde A es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento realizado.

Dada la realización de un experimento y una variable aleatoria X definida sobre el mismo, la distribución de probabilidad de X es una función $f(x)$ que asigna a cada valor posible x de la variable aleatoria X la probabilidad de que al realizarse el experimento, el resultado sea un evento para el cual la variable aleatoria definida sobre el mismo tome el valor de x , esto en el caso de que la variable aleatoria solo pueda tomar un conjunto finito de valores.

En el caso de que la variable aleatoria pueda tomar un continuo de valores, entonces $f(x)$ asigna a cada valor posible x de la variable aleatoria X la probabilidad de que al realizarse el experimento, el resultado sea un evento para el cual la variable aleatoria definida sobre el mismo este en el intervalo cerrado $[x, x + \Delta x]$.

De manera formal, para el caso discreto se tiene:

$$p(x) = P(X = x)$$

Y para el caso continuo:

$$f(x) = P(x \in [x, x + \Delta x])$$

El valor esperado $E[g]$ de una función $g(x)$ se define por:

$$E[g] := \sum g(x)f(x)$$

En el caso discreto, donde la suma es sobre todos los posibles valores de la variable aleatoria.

Para el caso continuo se tiene:

$$E[g] := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

De aquí se pueden definir algunos parámetros relevantes de la distribución de probabilidad que nos hablan del comportamiento de los valores de la variable aleatoria en cuestión, algunos de estos parámetros son: media estadística, desviación estándar, coeficiente de asimetría, coeficiente de curtosis, entre otros. Dichos parámetros están dados, respectivamente por:

$$\mu = E[x]$$

$$\sigma = \sqrt{E[(X - \mu)^2]}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3} E[(X - \mu)^3]$$

$$\beta = \frac{1}{\sigma^4} E[(X - \mu)^4]$$

De aquí es fácil deducir, utilizando propiedades de integrales y sumatorias que

$$\mu = M_1$$

$$\sigma = \sqrt{M_2 - \mu^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3} (M_3 - 3\mu M_2 + 2\mu^3)$$

$$\beta = \frac{1}{\sigma^4} (M_4 - 4\mu M_3 + 6\mu^2 M_2 - 3\mu^4)$$

donde:

$$M_j = E[x^j]$$

Se denomina j –ésimo momento de la variable aleatoria X . De aquí se puede deducir la importancia del cálculo de momentos de distribuciones de probabilidad.

4. Distribución y la Transformada de Fourier

Como se mencionó en la segunda sección, dada una función $f(x)$ con las características de regularidad mencionadas, es posible definir su transformada de Fourier, si dicha función corresponde a una distribución de probabilidad continua, entonces dichas condiciones se cumplen y se puede calcular su transformada de Fourier, la cual estaría dada por:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i u x} dx$$

A esta expresión se le conoce como función característica de la distribución.

Derivando ambos lados de esta ecuación se obtiene la siguiente expresión para $F'(u)$

$$-2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-2\pi i u x} dx$$

La cual al ser evaluada en $u = 0$ produce la expresión

$$F'(0) = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

es decir:

$$F'(0) = -2\pi i M_1$$

En palabras, la primera derivada de la función característica evaluada en $u = 0$ es directamente proporcional al primer momento de la distribución.

Derivando de manera sucesiva la función característica se obtiene la siguiente expresión para $F^{(r)}(U)$:

$$(-2\pi i)^r \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) e^{-2\pi i u x} dx$$

La cual al ser evaluada en $u = 0$ da como resultado la siguiente expresión

$$F^{(r)}(0) = (-2\pi i)^r M_r$$

Es decir, una proporcionalidad directa entre el la r -ésima derivada de la función característica evaluada en $u = 0$ y el r -ésimo momento de la distribución.

En el caso en el que la variable aleatoria es discreta, si los valores de dicha variable son la secuencia $0, 1, 2, \dots, N - 1$ y los valores de la distribución en dichos valores están dados por la secuencia $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ lo cual es algo común en aplicaciones, donde la variable aleatoria cuenta la cantidad de ocurrencias de cierta condición, entonces, la transformada de Fourier discreta de la secuencia $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ estaría dada por:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{-2\pi i k n}{N}}$$

Al derivar ambos términos de esta ecuación y evaluarla en $k = 0$ de manera análoga al caso continuo se obtiene:

$$Y'(0) = -\frac{2\pi i}{N} M_1$$

Es decir, una proporcionalidad entre la primera derivada de la transformada de Fourier evaluada en cero y el primer momento de la distribución. De manera análoga al caso continuo se puede obtener la proporcionalidad:

$$Y^{(r)}(0) = \left(-\frac{2\pi i}{N}\right)^r M_r$$

La cual permite el cálculo de momentos y por ende, de ciertos parámetros de la distribución,

En caso de que la variable aleatoria no tome los valores $0, 1, 2, \dots, N - 1$ sino una secuencia creciente $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$, igualmente espaciada de valores se puede aplicar un cambio de variable lineal y definir la transformada de Fourier como:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{-2\pi\Delta i k n}{N}}$$

Donde Δ es el espaciamento entre cualesquiera 2 elementos consecutivos de la secuencia creciente antes mencionada.

Multiplicando ambos lados de esta última ecuación por $\Psi(k) = e^{\frac{-2\pi i x_0 k}{N}}$ se obtiene:

$$\Psi(k) Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{-2\pi(x_0 + \Delta n) i k}{N}}$$

Definiendo $\Theta(k) := \Psi(k) Y(k)$ y derivando ambos miembros, para posteriormente evaluar en $k = 0$ se tiene:

$$\Theta'(0) = -\frac{2\pi i}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x_0 + \Delta n) y_n$$

Es decir:

$$\Theta'(0) = -\frac{2\pi i}{N} M_1$$

De manera análoga, la aplicación sucesiva de la derivación y su posterior evaluación en cero produce la ecuación:

$$\Theta^{(r)}(0) = \left(-\frac{2\pi i}{N}\right)^r M_r$$

Dando así, una vez más, una fórmula para calcular los momentos de dicha distribución discreta.

Existen casos en los que la variable aleatoria no toma una secuencia igualmente espaciada, sin embargo, se pueden hacer adecuaciones del método aquí descrito, por ejemplo, insertando valores intermedios de dicha variable aleatoria para hacerla igualmente espaciada y asociándole un 0 como función de distribución a dichos valores insertados.

De igual manera, con adecuaciones del método y la utilización de límites se pueden tratar distribuciones que toman un conjunto infinito de valores no continuo.

En el caso continuo, el primer paso para el cálculo de momentos por este método consiste en resolver la integral dada por la función característica, la cual, es fácil de calcular de forma analítica para algunas distribuciones de probabilidad comunes.

En el caso discreto se comienza calculando la transformada discreta de Fourier de la distribución dada, la cual se puede pensar como el equivalente a la función característica del caso continuo.

En ambos casos una vez obtenida la función característica, su derivación y evaluación, son procesos estándar, fáciles de implementar en algún software de cálculo algebraico.

Existen muchas otras aplicaciones del análisis de Fourier en lo que se refiere a probabilidad y estadística y que ya no se trataran en este trabajo, pero que el lector fácilmente puede encontrar en la literatura, más aun, la mayoría de los programas comunes para manejo de datos estadísticos ya hacen uso de esta herramienta de manera profunda.

5. Conclusiones

Como se vio en este trabajo, la Transformada de Fourier provee de manera natural, un método matemático sumamente útil en el campo de la probabilidad y la estadística para el cálculo de momentos de distribuciones de variables aleatorias ya sean estas continuas o discretas.

En algunos casos, más que útil, dicho método resulta mejor que el tradicional y su ventaja radica en el hecho que evita el cálculo de múltiples integrales o sumatorias las cuales pueden tornarse complicadas o imposibles de resolver por métodos analíticos y que son necesarias para obtener todos los momentos de la distribución si se obtuviesen a partir de la definición.

6. Referencias

- [1] Jean Baptise J. Fourier, (1822), *Théorie analytique de la chaleur*, Paris Francia, Chez Firmin Didot père et fils
- [2] Taylor, B. (1715). *Methodus incrementorum directa et inversa*. Londini: typis earsnianis.
- [3] Brillinger, D. R. y Krishnaiah P. R., (1983) *Handbook of Statistics 3. Time Series in the Frequency Domain*. Amsterdam: North Holland.
- [4] Hamilton, J. D. (1994) *Time Series Analysis*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- [5] Priestley, M.B. (1981), *Spectral Analysis and Time Series*, London, Academic Press.