Curvas Bézier controladas por algoritmo genético como método para la obtención de geometrías continuas optimizadas.

Mayra Angélica Bárcenas Castro[1*], Ramón Díaz de León-Zapata[1]

[1]Instituto Tecnológico de San Luis Potosí, Av. Tecnológico s/n, Soledad de Graciano Sánchez, San Luis Potosí, C.P. 78376, México.

*e-mail: mayrabarcenas0422@gmail.com

Resumen

Se presenta un método para modelado geométrico aplicando un algoritmo genético en el que la población (individuos) son los puntos de control de curvas Bézier de primer, segundo o tercer grado. Con la aplicación de este método se obtienen figuras sólidas, continuas y suavizadas y se discuten algunas aplicaciones que van desde la ingeniería de nanomateriales, pasando por el modelado de prótesis hasta macro estructuras mecánicas complejas y ciencias sociales.

Palabras clave: Algoritmo genético, Curva Bézier, Modelado geométrico, Método del elemento finito.

Abstract

A method for geometric modeling is presented by applying a genetic algorithm in which the population (individuals) are the control points of Bézier curves of first and second order. With the application of this method, solid, continuous and smoothed figures are obtained and some applications are discussed, ranging from the engineering of nanomaterials, through the modeling of prostheses to complex mechanical macro structures and science social.

Key Words: Genetic algorithm, Bézier curve, Geometric modeling, Finite element method.

1. Introducción

Los algoritmos genéticos son capaces de encontrar soluciones optimizadas a problemas complejos no analíticos para crear subsecuentes generaciones de individuos que están codificados por sus respectivos genomas y que compiten por su derecho a heredar sus características de acuerdo con ciertos parámetros de su estado de salud [1]. Estas soluciones optimizadas pueden ser analizadas para comprender fenómenos físicos o comportamientos sociales aún no desvelados, así como para el diseño y fabricación de materiales y dispositivos de toda índole.

El comienzo de las investigaciones con relación a los algoritmos evolutivos fue inspirado por la imitación de la naturaleza en donde todos los organismos vivientes habitan en un cierto entorno. Estos organismos poseen un material genético específico que contiene información sobre ellos y les permite transferir algunas de sus características a las nuevas generaciones durante la reproducción, en la que además otro de los organismos transfiere otra parte de sus características. Estas características están codificadas en genes y estos a su vez almacenados en cromosomas, que en conjunto constituyen el material genético denominado genotipo. Durante la transferencia de características, los genes resultan modificados como consecuencia de la cruza de los cromosomas maternos y paternos. La mutación es también un evento que ocurre adicionalmente de vez en cuando como consecuencia de un cambio en la información contenida en alguno de los genes en un cromosoma. Si bien el nuevo individuo que es creado durante la cruza de material genético posee la información de sus padres, la combinación de dos organismos diferentes lo hace también único; este organismo comienza a vivir entonces en un entorno que, si bien no es significativamente diferente al de sus padres, su desarrollo le exige un desenvolvimiento que le permita sobrevivir y ser capaz ahora de poder transferir su genoma para mantener la

especie en el entorno. El individuo que se adapta ineficientemente a su entorno encontrará dificultades para sobrevivir y transferir sus genes a las nuevas generaciones.

Es posible tomar estas ideas y adaptarlas para la solución de problemas de optimización, es decir se puede crear una versión análoga a este proceso por medio de cálculo numérico bajo el supuesto de que el entorno está definido sobre las bases de un problema resuelto y que una población de individuos constituye soluciones potenciales a un problema dado de modo que en el entorno existe ya la solución.

Por la naturaleza de los algoritmos evolutivos que toman a cada miembro del grupo biológico para su tratamiento matemático equivalente en cualquier otra aplicación (no necesariamente biológica) de manera independiente (individuos) [2], los resultados de construcciones geométricas optimizadas aplicando estos métodos, suelen ser discretas, como puede apreciarse en la figura 1.

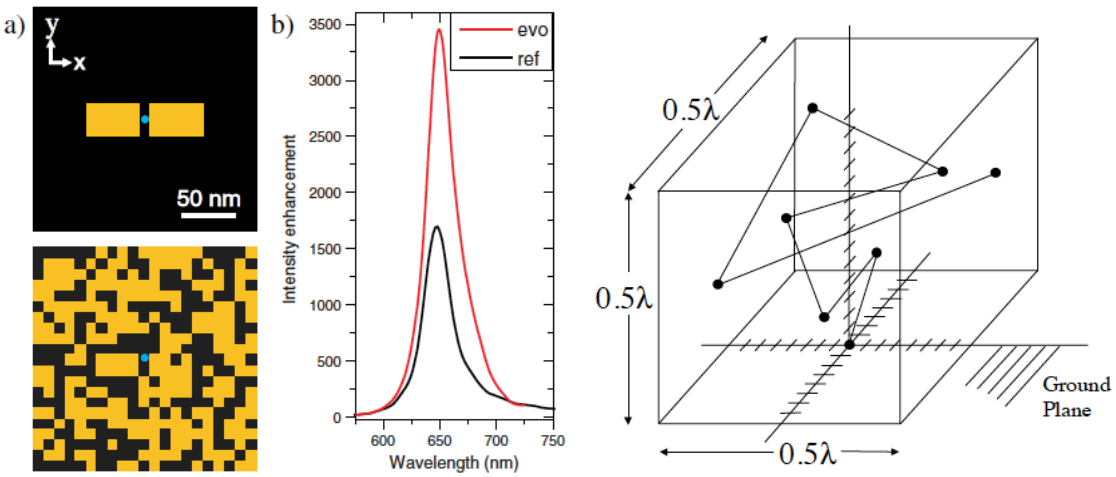

Figura 1. Ejemplos de geometrías óptimas obtenidas con algorimtos genéticos. a) Nanoantena [3]. b) antena para freceuncias satelitales [4].

Si bien la teoría y simulación numérica corroboran el comportamiento óptimo de estas geometrías, su aplicación práctica o su construcción puede resultar compleja: la figura 1a posee dimensiones nanométricas donde las distancias y figuras cuadradas pueden distorsionarse por las limitaciones intrínsecas de la escala. Para el caso de la figura 1b, el ángulo y longitud de cada brazo en tres dimensiones puede complicar innecesariamente su manufactura.

Es en este punto donde las curvas Bézier permiten generar geometrías continuas y de bordes suavizados (a menos que la evolución lleve la geometría a esquinas agudas). Estas curvas están compuestas por una línea recta definida entre dos puntos y que posee además uno o más puntos denominados de control que la deforman al intentar formar una curva en lugar de una recta para unir todos los puntos involucrados (el inicial, el final y los de control). En caso de que la curva Bézier contenga un solo punto de control es también denominada curva Bézier de primer grado, mientras que, si consta de dos puntos de control, es denominada curva Bézier de segundo grado y así sucesivamente según el número de puntos de control. La figura 2 muestra una representación de los elementos que constituyen una curva Bézier y cómo el cambio de coordenadas espaciales los puntos de control la deforman.

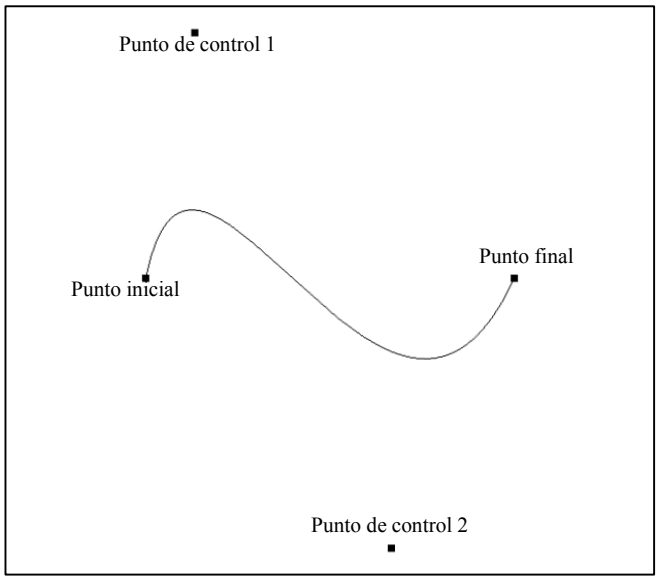

Figura 2. Curva Bézier de segundo grado.

La unión de varias de estas curvas puede formar una geometría inicial abierta o cerrada, con tantas curvas como sea necesario para lograr el efecto de resolución o suavizado (calidad) deseado de la geometría final.

2. Método y caso aplicativo

Un ejemplo en donde se puede aplicar el algoritmo genético es modelando la evolución de una población en un espacio de posibles soluciones aplicando transformaciones a estos procedimientos candidatos, de tal forma que la selección sea una estrategia de optimización [5].

Suponga que tiene una población finita en un espacio delimitado donde se desea obtener el camino óptimo para la llegada eficiente de un mensaje. Inspirados en este enunciado se propone como ejemplo que la población sea una etnia. Las etnias tienen

delimitado su territorio. Conjeture que conoce la distribución del lugar donde residen los individuos que pertenecen a la etnia. En las etnias existe el comisariado que es el jefe principal de toda la etnia y también el primero en recibir un mensaje. Dicho mensaje es muy importante pues su preservación dependerá de las futuras generaciones. Tome en cuenta que existen diferentes medios por los que puede llegar el mensaje, en este caso se desea conocer cuál será el más apropiado.

Una forma de modelar la evolución de una población es mediante mecanismos de crecimiento exponencial. Esto consiste en una reproducción de los agentes de una población mediante copias de sí mismos. Por ejemplo, una persona que cada 20 minutos genera una copia de sí misma, 20 minutos más tarde tendremos dos, en una hora serán cuatro y así sucesivamente por las generaciones. Entonces, el número de personas en la generación $t+1$ es:

$$n_{t+1} = 2n_t \tag{1}$$

La solución de (1) si $n_0 = 1$ es:

$$n_t = 2^t n_0 = 2^t \tag{2}$$

Modelando la población en términos de tasas el modelo (2) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria donde la población $n(t)$ crece de acuerdo con la tasa de reproducción $r = cte$, tenemos

$$\dot{n}(t) = rn(t) \tag{3}$$

Donde la solución es:

$$n(t) = n(0)e^{rt} \tag{4}$$

La escases de recursos se puede incluir como una modificación de la Ley de Malthus haciendo que la tasa de replicación por individuo sea una función decreciente de la población, anulándose estrictamente cuando una población alcanza un nivel máximo sostenible, dando lugar a la ecuación Logística siguiente:

$$\dot{n}(t) = rn(t)(1 - \frac{n(t)}{K}) \tag{4}$$

Donde K es la capacidad de carga del ambiente donde se desarrolla la población. Dada una condición inicial n_0 la solución de ecuación (4) está dada por:

$$n(t) = \frac{Kn_0e^{rt}}{K + n_0(e^{rt}-1)} \tag{5}$$

Donde $(\lim_{t\to\infty} n(t) = K)$ el límite de la población converge hacia la capacidad de carga.

Suponga que tenemos dos tipos de individuos en una población, A y B. Los individuos tipo A se reproducen con una tasa a; los individuos tipo B se reproducen con una tasa b. La tasa de reproducción se interpreta como la adaptación de cada tipo de individuo a su ambiente. Sea $x(t)$ es el número de individuos tipo A en el tiempo t que hay en la población; $y(t)$ sea el número de individuos tipo B en el tiempo t. Al inicio $t = 0$, el número de individuos tipo A y tipo B son x_0 y y_0, respectivamente. Las fracciones de la población que son tipo A y tipo B crecen según las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = ax$$

$$\dot{y} = by \tag{6}$$

Cuya solución analítica es:

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

$$y(t) = y_0 e^{bt} \tag{7}$$

Por lo tanto, las subpoblaciones de individuos tipo A y tipo B crecen exponencialmente con una tasa a y b, respectivamente. Sí a es mayor que b, entonces los individuos tipo A se reproducen más rápido que los individuos tipo B; después de algún tiempo habrá más A's que B's.

Si definimos la relación $\rho(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$ tenemos

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{y^2} = (a - b)\rho \tag{8}$$

Con solución para la condición inicial $\rho_0 = \frac{x_0}{y_0}$, está dada por:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{(a-b)t} \tag{9}$$

Si $a > b$ entonces ρ la relación entre tipos A y B tiende a infinito. Si $a < b$ entonces ρ tiende a cero. Es decir, si A supera a B, ρ tiende a infinito; por otro lado, si B supera a A, ρ tiende a cero.

Considerando que el tamaño de la población total se mantiene constante; $x(t)$ denota la frecuencia de tipos A; $y(t)$ denota la frecuencia de tipos B en el tiempo. Como solo hay individuos tipo A y B en la población tenemos que $x + y = 1$ (una población fija). Como

antes los tipos A y B se reproducen respectivamente a tasas $a\ y\ b$. Entonces, tenemos las ecuaciones

$$\dot{x} = x(a - \phi)$$

$$\dot{y} = y(b - \phi) \tag{10}$$

Donde el término ϕ asegura que $x + y = 1$. Esto es solo posible si $\phi = ax + by$. Otra forma de considerar a ϕ es como el promedio de adaptación de la población.

Las ecuaciones (10) describen una sola ecuación, porque y puede ser reemplazada por $(1 - x)$; entonces, despejando tenemos:

$$\dot{x} = x(1 - x)(a - b) \tag{11}$$

Esta ecuación diferencial tiene tres posibles comportamientos, $x = 0$ y $x = 1$. Si $x = 1$ entonces en la población tenemos solamente individuos tipo A y nada más puede suceder. Si $x = 0$ entonces en la población tenemos solamente individuos tipo B y nada más puede suceder. Por otro lado, si $a = b$, la población se queda con las fracciones de individuos tipo A y tipo B que tenía como condición inicial ($x(0)\ \epsilon\ (0,1)$). Es decir, ambos pueden coexistir. El equilibrio de $x = 0$ es estable si $a < b$. Por el contrario, $x = 1$ es estable si $a > b$. Igualmente, cuando $a = b$, cada punto interior puede ser un equilibrio estable.

Supongamos que, durante su reproducción de los individuos de la población descrita arriba, se presenta un error, este error es que cambian de tipo, estos individuos son "mutantes". Ahora, si $a > b$, y en un principio todos son individuos tipo A, aunque unos

cuantos mutaran y se volvieran tipo B, a través de las generaciones, los mutantes tipo B desaparecerán pues el equilibrio estable es que todos sean tipo A. Por otro lado, en un principio todos son tipo B, y uno muta a ser tipo A, como $a > b$, al paso de las generaciones, todos serán A, pues como se dijo antes, la situación que todos los individuos sean tipo A es el equilibrio estable [6].

Hasta este punto se ha trabajado con la población, sin embargo, otra variable importante a tratar es el espacio delimitado donde interactúan los individuos de la etnia. Inspirados en que dicho territorio delimitado de la etnia puede ser las coordenadas de un plano, la idea de definir geométricamente las formas trazando una recta tiene sentido. Sin embargo, en lugar de unir dos puntos en una recta piense en que se puede unir con una curva, en este sentido surgen los elementos esenciales para trazar una curva de Bézier. Como alternativa es práctico y común usar interpolaciones entre puntos predefinidos que puedan realizarse mediante curvas Bezier. Los puntos de control de esta curva se mueven a su vez siguiendo curvas de Bézier que definen la superficie [7].

De acuerdo a [8] la curva de Bézier de grado n puede ser generalizada de la siguiente forma. Dado los puntos $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots \dots \dots P_n$, que son los puntos de control, la ecuación para la curva de Bézier es:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x)^2}}{\sqrt{2\pi}} \tag{12}$$

Si la curva fuese de orden cinco, es decir $((n = 5)$, entonces $w < x$. Esta ecuación puede ser representada de manera recursiva como:

$$p(w < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x)^2}}{\sqrt{2\pi}} \quad (13)$$

Por otro lado no se debe olvidar que la optimización que se desea realizar es precisamente encontrar los caminos eficientes para que se preserve el mensaje. En este ejemplo suponga que existen varios tipos de canales. Por ejemplo, utilizar el teléfono fijo, email, celular entre otros. Una alternativa para trabajar los datos de los canales es usando la función de densidad de probabilidad que debe tener las siguientes propiedades:

$$f(x) \geq 0 \; para \; toda \; x \quad (14)$$

$$\int_0^n f(x)\, dx = 1 \quad (15)$$

De esta forma a cada canal corresponderá un peso que dependerá de la información que se tenga con respecto de cada variable [9].

Prosiguiendo con el ejemplo de las etnias y utilizando Excel suponga que tiene lo siguiente. Se tiene información de una etnia con un comisariado y cuatro familias en la primera generación, tome en cuenta que su territorio está delimitado como se muestra en la siguiente *Figura 3.*

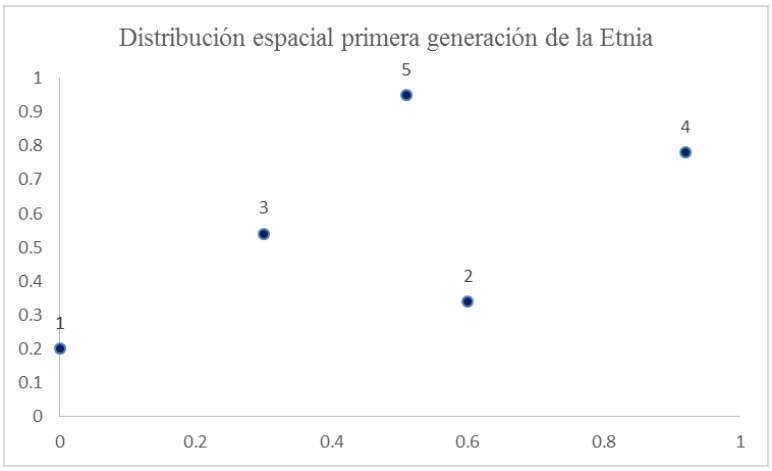

Figura 3. Distribución espacial de la etnia primera generación y la conexión entre pobladores.

Sin embargo, en la segunda generación disminuye a un comisariado y tres familias como se muestra a continuación.

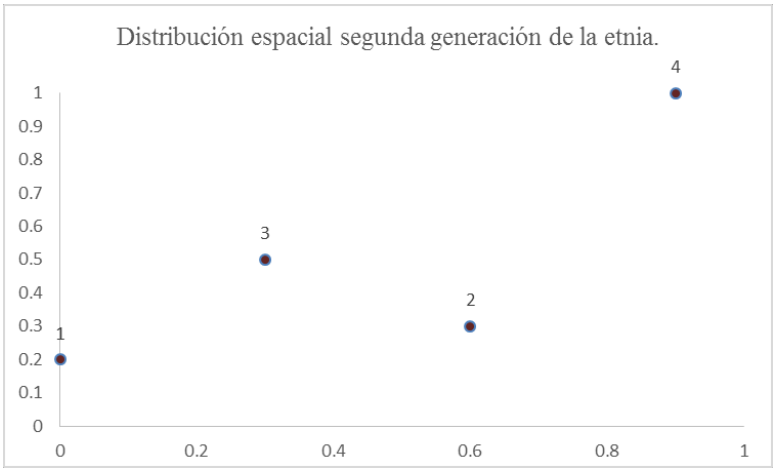

Figura 4. Distribución espacial de la etnia segunda generación y su conexión con los pobladores.

3. Resultados

Utilizando la función de crecimiento exponencial para las siguientes siete generaciones se obtuvo la siguiente tabla:

Tiempo (Generaciones)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Población	*5*	*4*	*3.2*	*2.56*	*2.05*	*1.64*	*1.31*	*1.05*	*0.84*

Tabla 1. Tendencia de crecimiento exponencial a partir de la información de las dos primeras generaciones.

Se puede observar que en la novena generación desaparece la población, sin embargo se logra visualizar en qué generación se debería de tomar estrategias para su preservación.

Ahora bien, se grafica los puntos de las dos generaciones conocidas y el orden del mensaje comenzando por el comisariado que es el nodo 1 y este le manda mensaje al nodo 2 y así sucesivamente. El orden se establece de esta manera porque los primeros tres tienen teléfono fijo, mientras que los dos últimos solo son por medio de persona a persona. Por eso son los últimos en enterarse. La primera generación quedaría de la siguiente manera:

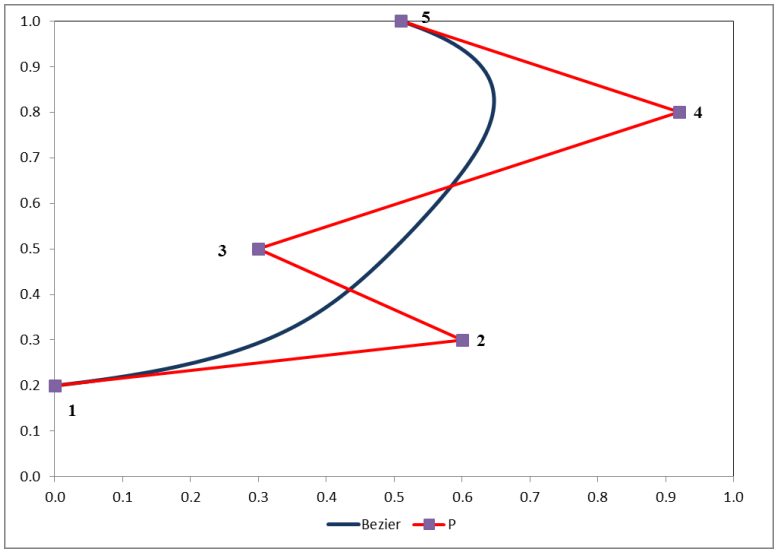

Figura 5. Camino que recorre el mensaje utilizando curvas de Bézier primera generación.

Se puede observar que el mensaje recorre todos los nodos, sin embargo también se nota que entre más alejado este el nodo, la curva se aleja, mientras que más cercano este el nodo la curva se acerca.

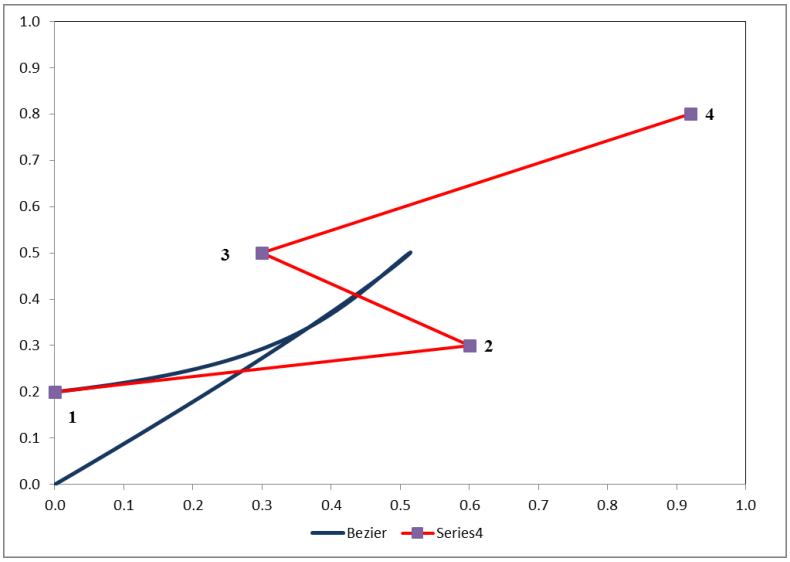

Figura 6. Camino que recorre el mensaje utilizando curvas de Bezier segunda generación.

Se logra observar que en esta segunda generación la curva ha descendido y tiene una tendencia a 0, además tiene el mismo comportamiento que el anterior, entre más alejado este el nodo, más alejada pasa la curva.

Hipotéticamente en la tercera generación solo quedarán tres nodos y se propone quitar el nodo 3 que es canal entre el nodo más lejano y más cercano, tome en cuenta que el nodo más alejado tardará o quizá no se llegue el mensaje por el tipo de canal que posee.

La gráfica entonces se visualiza de la siguiente manera:

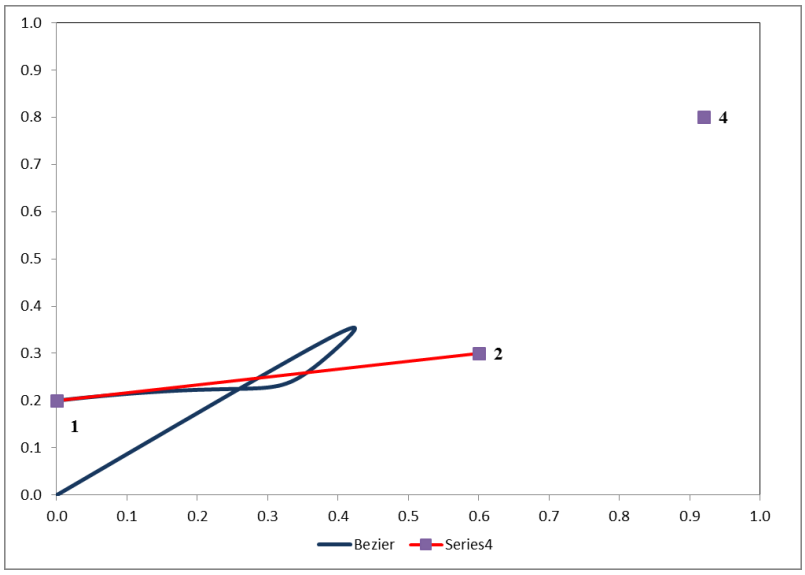

Figura 7. Camino que recorre el mensaje utilizando curvas de Bezier en la tercera generación hipotética.

Por supuesto que se pudo quitar el nodo 4 o el nodo 2, todas las combinaciones posibles. Pero en este ejemplo se puede notar que además que la curva tiende a cero, se forma un nudo.

1. Discusión y Conclusión

Se puede observar que el nodo final al realizar la curva de Bézier no se encuentra, por lo tanto, ésta tiende a cero, en este contexto mientras que para las ciencias duras la curva de Bézier el nodo final es la finalización del trayecto, en las ciencias sociales no forzosamente es la misma interpretación pues dependerá si el sistema es lineal o no lineal.

La trayectoria de la curva en la *Figura 5* realiza su recorrido de manera exitosa, lo que quiere decir que a todos los integrantes les llega el mensaje. En la *Figura 6* por otro lado ocurre una inflexión de tal forma que la curva intenta abarcar por todos los puntos restantes,

sin embargo, esta inflexión se ve más pronunciada entre el nodo 2 y 3, en este sentido se puede interpretar que la curva desde el punto inicial al punto de inflexión garantiza el mensaje, mientras que su regreso generará distorsión o final de este.

En la *Figura 7* la inflexión es menor, inclusive un poco más de la mitad de eficiencia de la llegada del mensaje. La curvatura entre el nodo 1 y 2 por arriba será la probabilidad de distorsión, mientras que la curvatura por debajo será la probabilidad de desaparecer el mensaje.

En este contexto relacionando este comportamiento con la tabla 1, se puede observar que la tendencia es la desaparición de la etnia, por lo tanto, la probabilidad de que preserven el mensaje es casi nulo.

Retomando el hilo conductor se pueden generar estrategias que coadyuven a la toma de decisiones para la preservación y eficiencia del mensaje. Además, en este trabajo no se está tomando en cuenta el comportamiento de las inflexiones, en este caso la intromisión. Estas distorsiones que pueden suceder alrededor de dichos nodos podrían ayudar a preservar o desaparecer el mensaje, inclusive la generación de un nuevo mensaje. Por lo que se propone en futuros trabajos introducir caminatas aleatorias alrededor de los nodos y generar caminos óptimos para la preservación y/o mejora de los mensajes.

Referencias

[1] M. Mitchell, An Introduction to Genetic Algorithms. Massachussets: Massachusetts Institute of Technology, 1999.
[2] D. E. Goldberg, Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Boston, MA.: Kluwer Academic Publshers, 1989.
[3] T. Feichtner, O. Selig, M. Kiunke, and B. Hecht, "Evolutionary Optimization of Optical Antennas," Physical Review Letters, vol. 109, no. 127701, p. 5, 2012.
[4] L. S. Derek, "Antenna Design Using Genetic Algorithms," presented at the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO), New York, NY, 2002.
[5] Villena Román, J., Crespo-García, R. M., & García-Rueda, J. J. (2011). Inteligencia en redes de comunicaciones.
[6] Nowak M., 2006, “Evolutionary Dynamics”, Harvard University Press, Boston.
[7] Prautzsch, H., Böhm, W., & Paluszny, M. (2005). Métodos de Bézier y B-splines. KIT Scientific Publishing, pp. 125.
[8] Pons-Prats, J., Bugeda, G., Zárate, F., & Onate, E. (2012). Optimización robusta en aplicaciones aeronáuticas con la combinación de cálculo estocástico y algoritmos evolutivos. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 28(1), 18-32.
[9] Walpole, R. E., Myers, R. H., & Myers, S. L. (1999). Probabilidad y estadística para ingenieros. Pearson Educación.