

Revisión de sistemas en el formalismo Lagrangiano

Dr. Clifford Benjamín Compeán Jasso^{1,2}

Resumen

Este trabajo presenta algunos sistemas explicados bajo el principio de mínima acción. Se da el Lagrangiano del cual se forma modelos matemáticos para diferentes áreas del conocimiento. Bajo este formalismo se puede obtener las ecuaciones de Maxwell de la teoría electromagnética hasta el comportamiento de sistemas dinámicos.

Palabras clave: Principio de mínima acción, leyes de conservación, control.

Abstract

This work show some system explained by the least action principle. From different areas some mathematical models are explained by a Lagrangian function. Via this model, it is possible obtain from the Maxwell equations in electromagnetic theory to behaviour of dynamical systems.

Key Words: Least action principle, conservations law, control

5. Introducción

Transcurría el año de 1915. En el Imperio Germánico existía una atmósfera bélica, unos meses antes había empezado la gran guerra. La universidad de Göttingen tenía por primera vez en su historia a una mujer dando catedra, Amalie Emmy Noether. Fue invitada y defendida por dos de los personajes más influyentes del campus y del mundo científico moderno, David Hilbert y Felix Klein. Esta dama ingresó sin pago ni posición oficial a pesar de una campaña sexista en

¹ compean.cliffor@itslp.edu.mx

² Instituto Tecnológico de San Luis Potosí, Av. Tecnológico S/N. Col. UPA. Soledad de Graciano Sánchez, San Luis Potosí

su contra. En ese mismo año Noether, la matemática, realizó un trabajo que cambió la forma de ver el mundo de la física. El descubrimiento de Noether, publicado en 1918 (Noether, 1918), presentan dos teoremas, simplificados en los siguientes enunciados

- I. *Si un sistema basado en una acción mínima, I , invariante a un grupo \mathcal{G}_k (invariante ante k simetrías continuas independientes), entonces tiene un número k de expresiones que se conservan. Esto implica la invariancia de I bajo el grupo \mathcal{G}_k .*
- II. *Si la acción mínima, I , es invariante del grupo $\mathcal{G}_{\infty k}$ (grupo infinito) e involucra funciones arbitrarias y sus derivadas, entonces existen k identidades que relaciona las funciones y sus derivadas, obtenidas bajo el principio de mínima acción.*

Estos dos teoremas representan, desde un punto de vista matemático, una forma de visualizar la naturaleza mediante un conjunto de leyes obtenidas mediante el análisis de las simetrías que están presentes.

Los físicos implementaron los teoremas a su estudio con excelentes resultados. Ambos teoremas tiene interpretaciones que permiten reproducir y expandir teorías y modelos. Desde un punto de vista físico, los teoremas tienen la siguiente interpretación (Kosmann-Schwarzbach, 2010)

- I. El primer teorema permite la generalización de muchas leyes de conservación y explica porque no cambian estas leyes mientras que evoluciona el sistema.
- II. El segundo teorema relaciona las simetrías descritas por un número dados de funciones arbitrarias (campos) mediante un sistema de ecuaciones diferenciales. Aplicable a sistemas donde se analiza la acción de un campo.

La idea presentada por Noether junto con sus trabajos posteriores fue tal que es considerada por personajes como Albert Einstein y David Hilbert como la mujer más importante en la historia de las matemáticas.

Para comprender el concepto y la importancia de estos teoremas, es necesario comprender el principio de mínima acción y la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana (Landau & Lifshitz, 1994). La cual, junto con sus aplicaciones, es el enfoque de este trabajo.

Este artículo empieza introduciendo, en la sección 2, el principio de mínima acción y la descripción Lagrangiana, así como los elementos básicos para la descripción de restricciones. Posteriormente en la sección 3, se hace referencia a la formulación Lagrangiana de diferentes áreas de la física. Después, se presentarán en la sección 4 algunos casos de la formulación de mínima acción para áreas diferentes a la física. Para completar el estudio se presenta el tratamiento para sistemas dispersivos en la sección 5. Para finalizar se presentan las conclusiones.

6. Principio de mínima acción y el formalismo Lagrangiano

a. Principio de mínima acción

El principio de mínima acción es un mecanismo que ha sido estudiado ampliamente desde el siglo XVII. D'Alembert había generalizado las leyes de Newton en 1743 utilizando la idea, mientras que Fermat había aplicado el principio casi un siglo antes en la óptica. El concepto de acción se atribuye a Pierre-Louis Moreau de Maupertuis que menciona en 1744 que **“La**

naturaleza es económica en todas sus acciones". Euler y Leibniz, desarrollaron esta idea incluyendo el cálculo de variaciones.

El formalismo del principio de mínima acción (Landau & Lifshitz, 1994) inicia con una acción, I , que describe un fenómeno el cual es una función escalar. Si el fenómeno evoluciona (siendo τ la variable de evolución) desde τ_0 hasta τ_f , entonces la acción del proceso se puede describir como una integral, I , tal que

$$I = S|_{\tau_0}^{\tau_f} = \int_{\tau_0}^{\tau_f} L d\tau, \quad (2)$$

donde L es una función llamada Lagrangiano y definida como

$$L = \frac{dS}{d\tau}. \quad (3)$$

No se debe confundir la acción, I , con la función de acción, S . El principio de mínima acción se refiere a minimizar la integral I , la cual no necesariamente significa minimizar S .

Como primer caso se considera que el Lagrangiano es una función de tanto de τ , como de x y su derivada, $\dot{x} = dx/d\tau$, es decir, $L \equiv L(\tau, x, \dot{x})$. Sin embargo, en una gráfica de $x(\tau)$ la trayectoria que describe la acción escogida por la naturaleza (descrita en la ecuación (1)) no es la única posible. Esto debido a que x y \dot{x} pueden ser arbitrarias como se muestra en la figura 1. Distingamos la trayectoria que minimiza la integral, I , (línea gruesa) de todas las posibles trayectorias (líneas punteadas).

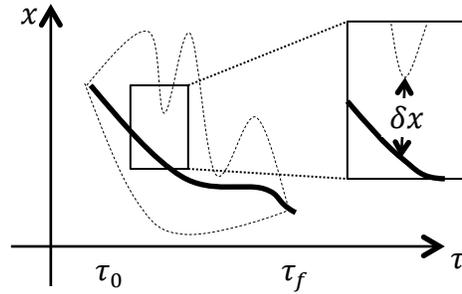


Figura 9. Representación esquemática de las posibles trayectorias para una acción. La línea sólida representa la trayectoria que minimiza I (ecuación (1)) mientras que las líneas punteadas representan otras posibles trayectorias, donde la δx es la diferencia entre las trayectorias respectivas.

Si este sistema describe un fenómeno real, entonces debe de ser tal que la variación de I , entre la acción natural y la acción que minimiza I debe ser 0, es decir

$$\delta I = \delta \left(\int_{\tau_0}^{\tau_f} L d\tau \right) = 0. \quad (4)$$

Las posible diferencias pueden causarse por pequeñas variaciones no cero de $x^* = x + \delta x$ y $\dot{x}^* = \dot{x} + \delta \dot{x}$. Estas variaciones afectan de manera directa al Lagrangiano, L , el cual depende de x y \dot{x} . Al realizar el cálculo de variaciones (Landau & Lifshitz, 1994) se obtiene que, para que se cumpla la ecuación (3) es necesario que el Lagrangiano cumpla con la expresión

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (5)$$

conocida como la ecuación de Euler-Lagrange. La ecuación (4) es básica no solamente en la física, sino en diferentes áreas del conocimiento, ya que si se puede representar un problema que se represente como una integral definida que se quiera minimizar, se identifica el Lagrangiano, el cual permitirá obtener su comportamiento del sistema al resolver la ecuación (4).

Junto con el formalismo Lagrangiano, se puede definir una función conocida Hamiltoniana, $H \equiv H(\tau, x, p)$, como

$$H = p\dot{x} - L = \frac{\partial S}{\partial \tau}, \quad (6)$$

donde p representa los momentos generalizados y está definido como

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \quad (7)$$

Si bien se describe el mismo sistema, se reduce a un par de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (9)$$

Ambos formalismos son equivalentes. Pero, en algunos casos es posible encontrar inmediata integrales en las ecuaciones (7) y (8). Estos casos surgen cuando el Hamiltoniano, H , no depende del tiempo de manera explícita. En esas situaciones, al derivar con respecto a τ y mediante las ecuaciones (7) y (8) se obtiene

$$\frac{dH}{d\tau} = \dot{x} \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{p} \frac{\partial H}{\partial p} = -\dot{x}\dot{p} + \dot{p}\dot{x} = 0,$$

lo cual implica que el Hamiltoniano es una constante,

$$H \equiv H(x, p) = \text{Constante}. \quad (10)$$

Se ha presentado el principio de mínima acción para sistemas donde el fenómeno a describir depende de una función que representa la evolución, τ , y una variable arbitraria y sus derivadas,

x y \dot{x} . Este modelo se puede extender a sistemas más elaborados. Para sistemas donde se tiene n funciones arbitraria (x_1, x_2, \dots, x_n) y sus respectivas derivadas $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$. Bajo esta situación, el formalismo Lagrangiano sigue empleando la definición dada en las ecuaciones (1), (2) y (3), sin embargo, la ecuación (4) se cambia por un conjunto de ecuaciones dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad (11)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$. Es decir se obtiene una ecuación de Euler-Lagrange por cada función.

Para el conjunto de elementos que describen el formalismo Hamiltoniano, la descripción del sistema se simplifica en las siguientes ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \quad (12)$$

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{x}_i - L = \frac{\partial S}{\partial \tau}, \quad (13)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (14)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (15)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$. Para el caso en el que H no depende explícitamente de la variable τ implica que $H \equiv H(x_i, p_i)$ es una constante. Además, el principio de mínima acción se puede generalizar a casos donde la dependencia también involucra derivadas de orden superior. Sin embargo, no se presentará en este trabajo.

Retomando el descubrimiento de Noether. El primer teorema se refiere a este principio. Los elementos vistos en este resumen han sido aplicados a la física. En específico, las leyes que se

aplican en la mecánica de partículas (mecánica Newtoniana, relatividad especial, etc.) se describen mediante este principio como es mencionado por Noether. De manera semejante, óptica geométrica utiliza este principio, trabajo realizado por Fermat.

El segundo teorema maneja el principio de mínima acción, con la diferencia que se presentan más de una variable de evolución. Para ello se necesita el concepto de campo, el cual se resume a continuación.

b. Campos

En el estudio de la naturaleza, se pueden distinguir dos tipos de elementos que describen a los sistemas, estos son los campos y las partículas.

Las partículas se refieren entidades localizadas (restringidas en el espacio) que perdura en el tiempo, a la que se le puede atribuir un movimiento definido. La descripción de sistemas de partículas se puede describir mediante el principio de mínima acción resumido en la sección 6.a.

Los campos físicos se refieren a entidades o cantidades que se distribuyen en el espacio y se describen mediante una función del espacio tiempo. Originalmente se utilizó para describir acciones a distancias (campos electromagnéticos y gravitacionales) y se ha extendido para describir otras entidades como variaciones de temperatura, tensiones ondas, etc.

La descripción se hace para cualquier tipo de variable. Sin embargo, para simplificar la explicación se presentarán el caso donde τ es el tiempo.

Los campos, a diferencia de las partículas, se distribuyen en todo el espacio. Existen de diferentes naturaleza matemática como

- 1) Campos escalares. A cada punto del espacio se le asocia un escalar. Temperatura, presión, densidad y potencial escalar son ejemplos de ello.
- 2) Campos vectoriales. A cada punto del espacio se le asocia un vector. Ejemplo de ellos son los campos eléctrico y magnético, campo gravitacional, potencial vectorial.
- 3) Campos tensoriales. Una función tensorial definida en el espacio-tiempo. El esfuerzo y la deformación en sólidos ejemplifican los campos tensoriales.
- 4) Campos espinoriales. Funciones de espinores que dependen del espacio-tiempo. La descripción cuántica relativista es mediante espinores.

Podemos considerar la densidad de la función de acción como

$$S = \int \mathcal{S} dx^n \quad (16)$$

y de manera semejante la densidad Lagrangiana como

$$L = \int \mathcal{L} dx^n, \quad (17)$$

donde

$$\mathcal{L} = \frac{d\mathcal{S}}{dt} \quad (18)$$

En este sentido la posición y el tiempo se convierten en variables que describen la evolución de mi sistema. Las densidades dependen de otros campos, $\phi_j \equiv \phi_j(t, \vec{x})$, donde j es el identificador. La densidad de la función de acción depende del espacio tiempo así como de los campos mencionados $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(t, x_i, \phi_j)$. La densidad Lagrangiana, además, dependerá del campo como de sus derivadas,

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(t, x_i, \phi_j, \partial_0 \phi_j, \partial_i \phi_j),$$

donde $\frac{\partial \phi_j}{\partial t} \equiv \partial_0 \phi_j$, y, $\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \equiv \partial_i \phi_j$.

Al aplicar el cálculo variacional al principio de mínima acción las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_j)} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j} \right) = 0,$$

donde $x_0 = t$. Note que se obtiene un sistema de ecuaciones, una ecuación por cada campo.

La descripción basada en el Hamiltoniano se presenta de manera semejante a las ecuaciones (11)-(14). Sin embargo no se profundizará en este trabajo.

Esta sección se refiere al estudio de campos. Refiriéndose a el segundo teorema de Noether. Aplicable a sistemas donde se estudia el medio. Ejemplo de ello es el campo Electromagnético, la gravitación, distribución de temperatura y presión, entre otros.

c. Restricciones

Las secciones previas se enfocaron en una descripción del principio de mínima acción. Sin embargo, el comportamiento de un sistema cambiar si se introducen restricciones, como por ejemplo, el confinamiento en una caja con ciertas características o el movimiento en una trayectoria bien definida. Estas restricciones se pueden incluir en el formalismo utilizando el método de multiplicadores de Lagrange.

Suponga que se tiene un sistema descrito por un Lagrangiano L (\mathcal{L} en caso de campos). Si se desea incluir un conjunto de restricciones con respecto a las coordenadas (o campos en su caso) y estas se pueden representar como una función igualada a 0, es decir

$$f_i \equiv f_i(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = 0.$$

Se propone un nuevo Lagrangiano L' (\mathcal{L}' para campos) que incluirá tanto a L como a las restricciones³ como

$$L' = L + \sum_i \lambda_i f_i,$$

donde λ_i son nuevos parámetros a definir. La forma de los parámetros se obtendrá al momento de resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange utilizando el nuevo Lagrangiano.

Teniendo los elementos necesarios para la descripción del sistema se presentan algunos ejemplos.

7. Sistemas físicos

El objetivo de esta sección es presentar algunos ejemplos físicos donde se aplica la descripción Lagrangiana del sistema. No es posible presentar todos los sistemas de la literatura. Sin embargo, se presentan algunos casos.

a. Partícula clásica

Como primera aplicación es el estudio de una partícula. A diferencia de la forma tradicional de proponer la acción, en este trabajo se propone iniciar con la definición de la regla de la cadena, donde el diferencial de la función de acción en el espacio-tiempo está dado por

³ Se propone $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \sum \lambda_i f_i$ para cuando se trabaja con campos.

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} dx_i, \quad (19)$$

donde n es la dimensionalidad del espacio.

Si la variable de evolución es el tiempo, $\tau \equiv t$, el Lagrangiano se reduce a

$$L = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} S. \quad (20)$$

En este caso podemos considerar que

- 1) El cambio máximo de la acción con respecto a la posición es proporcional al momento generalizado, esto es

$$\vec{\nabla} S \equiv k\vec{p} = k(m\dot{\vec{x}} + \vec{A}).$$

- 2) La variación temporal es una función definida como $\frac{\partial S}{\partial t} = -\phi$.

Reescribiendo estas consideraciones con respecto a la acción, se reescribe el Lagrangiano como

$$L = -\phi + k\dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} = -\phi + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\theta} + km\dot{x}^2,$$

donde $\dot{x} \equiv |\dot{\vec{x}}|^2 = \sum \dot{x}_i^2$.

Para obtener el valor de la constante se utiliza la ecuación (11). Si se considera que las funciones ϕ y \vec{A} no dependen de la velocidad, entonces se obtiene que $k = \frac{1}{2}$, lo que reduce la ecuación anterior

$$L = -\phi + \frac{1}{2} \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} = -\phi + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}, \quad (21)$$

Esta última ecuación coincide con el Lagrangiano de una partícula ante la presencia de un potencial escalar y un potencial vectorial. La ecuación descrita por este Lagrangiano es equivalente a la fuerza de Lorentz,

$$m \ddot{\vec{x}} = \vec{E}' + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}', \quad (22)$$

donde, $\ddot{\vec{x}} = d^2 \vec{x} / dt^2$ y

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= q \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \\ \vec{E}' &= q \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (23)$$

El Hamiltoniano del sistema se obtiene de ecuación (12) la cual si ϕ y \vec{A} son independientes del tiempo se reduce a la energía

$$H = \frac{1}{2m} \sum_i (p_i - A_i)^2 + V = E, \quad (24)$$

la cual es una constante. En la ecuación previa $V = \phi - \frac{1}{2m} A^2$. Esta forma de la energía es la más usada en la literatura. En sistemas donde el potencial vectorial es cero, $\vec{A} = 0$, el sistema se reduce a

$$L = -\phi + \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad (25)$$

Y la ecuación de movimiento se simplifica a $m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}\phi$. Esta descripción es suficiente para una descripción de objetos macroscópicos a velocidades pequeñas. En el siguiente ejemplo se mostrará la construcción del Lagrangiano para una partícula relativista.

b. Partícula relativista

Un sistema relativista son aquellos donde uno de los elementos tiene una velocidad muy alta, cercana a la velocidad de la luz ($c = 3 \times 10^8$ m/s).

A diferencia de un sistema clásico, una partícula relativista libre describe una trayectoria dada por la relación

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \sum_{i=1}^n dx_i^2, \quad (26)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Si bien se puede minimizar ds para obtener el comportamiento de una partícula libre, se buscará obtener la ecuación que describe el comportamiento de una partícula en un campo electromagnético, descrito por los potenciales eléctricos y magnéticos. Para ello se iniciará con ecuación (15). Es importante mencionar que una característica de la relatividad especial es que sitúa al tiempo al mismo nivel que las coordenadas espaciales dentro de un vector de la forma (ct, \vec{x}) . El tiempo depende del marco de referencia en el que se esté situado. Es por ello que es necesario introducir el tiempo propio, τ . Este tiempo propio se relaciona con el tiempo mediante la relación

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt,$$

donde

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}}.$$

Aplicado al Lagrangiano descrito en ecuación (16) y considerando que el movimiento depende del sistema inercial en el que se encuentra el sistema, se pueden introducir el movimiento del sistema como

1) El cambio máximo de la acción con respecto a la posición es proporcional al momento generalizado, esto es $\vec{\nabla}S \equiv -\vec{p} = -\gamma m \dot{x} + \vec{A}$.

La introducción de γ y del signo en el movimiento es una consecuencia de que se debe reproducir la acción de partícula libre como se menciona en ecuación (21).

2) La variación temporal cambia en el sentido que el tiempo también presenta variación con respecto al sistema inercial. Tal es así que la derivada temporal se reduce a

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \gamma m c^2 - \phi.$$

Por lo tanto, el Lagrangiano que describe a una partícula relativista es

$$L = \gamma m (c^2 - \dot{x} \cdot \vec{p}) + \phi = \frac{1}{\gamma} m c^2 + \dot{x} \cdot \vec{A} - \phi \quad (27)$$

Al igual que el caso clásico se obtienen las ecuaciones de movimiento a resolver. Así mismo se puede formular la descripción Hamiltoniana del sistema. Se han presentado dos ejemplos en los que se trabaja con una partícula.

c. Campos electromagnéticos

Los sistemas mencionados anteriormente tienen una variable de evolución. Para sistemas con más variables de evolución es necesario trabajar con la densidad Lagrangiana, \mathcal{L} . Un ejemplo de ello el campo electromagnético. En la sección a se describe el comportamiento de una partícula ante la presencia de un campo escalar y vectorial, el cual puede interpretarse como los potenciales electromagnéticos. En esta sección se estudiará el campo mismo.

Para el campo electromagnético la densidad Lagrangiana se reduce a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \rho \phi + \vec{j} \cdot \vec{A}, \quad (28)$$

donde E y B se definen basada en ecuación (21), ρ representa la densidad de carga eléctrica y \vec{j} la densidad de flujo de carga (corriente eléctrica) que pasa a través de un segmento de área.

En esta densidad Laplaciana se constituye por un elemento asociado a la densidad de energía asociada a la radiación (dado por $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0^{-1} B^2$) y otra asociado al potencial escalar y vectorial (definido por el término $-\rho \phi + \vec{j} \cdot \vec{A}$).

En esta densidad hay que mencionar que el Lagrangiano es una función de ϕ y de $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$.

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(t, \vec{x}, \phi, \vec{A}, \partial_0 \phi, \partial_0 \vec{A}, \partial_i \phi, \partial_i \vec{A}),$$

donde $x_i = x, y, z$ definida por el vector de posición \vec{x} . Al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange con respecto a ϕ se obtiene

$$\begin{aligned}
 -\rho - \epsilon_0 \nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0, \\
 -\rho + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

que corresponde a la ley de Gauss para las cargas eléctricas. En el caso de \vec{A} , se obtiene la ley de Ampere

$$\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0.
 \tag{30}$$

Las ley de Faraday y la ley de Gauss para campos magnético se obtienen como una consecuencia de la definición tanto de \vec{E} como de \vec{B} .

d. Sólidos elásticos

En la descripción de sólidos elástico, es necesario introducir el concepto de deformación. Suponga que tiene un sólido elástico. El sólido se puede estudiar considerando un pequeño cubo situado en el punto \vec{x} . El cubo tiene un volumen, que al presentarse una deformación implica un cambio de volumen definido por el cambio en las aristas. Este cambio se refiere al desplazamiento, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, de la forma original como se muestra en la Figura 10.

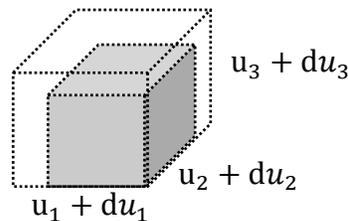


Figura 10. Representación esquemática del desplazamiento de un cubo infinitesimal con respecto a la forma original.

Las diferentes posiciones del cubo en el sólido tienen desplazamientos diferentes. Ante ello se puede estudiar el cambio del desplazamiento por posición como la deformación. Se sabe que la deformación es simétrica, por lo tanto la deformación, ϵ_{ij} , se define como

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (31)$$

La densidad Lagrangiana de un sólido elástico se reduce a

$$\mathcal{L} = \sum_{ijkl} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \sum_i \left(\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 - b_i u_i \right). \quad (32)$$

donde ρ es la densidad del sólido, b_i la fuerza aplicada por unidad de masa y C_{ijkl} representan las constantes elásticas del sistema. Al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange, el sistema se reduce a

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \right) + b_i + \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (33)$$

donde

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \frac{\partial F_i}{\partial A_j} \quad (34)$$

y representa el esfuerzo definido como la fuerza por unidad de área aplicada en cada punto del sólido. La ecuación que describe la dinámica de un sólido elástico equivalente a la segunda ley de Newton.

8. Otras áreas del conocimiento

Como se ha visto, el principio de mínima acción es aplicable a otras áreas de conocimiento como economía o programación. El principio es aplicable cuando se tiene un modelo dinámico al

cual se desee maximizar o minimizar, independientemente del área de estudio. Un ejemplo de ello se aplica en la economía pesquera.

En varias áreas en economía se utiliza la teoría del control óptimo (Ortíz Olvera, 2011). En 1957, L. S. Pontryagin aplica el principio a problemas determinísticos de como asignar o explotar recursos para la toma de decisiones.

Una ventaja de este modelo con respecto a otros es que es una técnica para modelar problemas de optimización dinámica bajo algunas restricciones.

Un ejemplo de ello se aplica a la economía pesquera. Suponga que se desea maximizar los beneficios netos de la pesquería, I , en un determinado tiempo, dado por la expresión

$$I = \int_{t_0}^{t_f} (u - c(x))\rho e^{-\delta t} dt \quad (35)$$

donde u es el precio unitario, x es la biomasa (cantidad de pescado en la región), $c(x)$ es el costo de extracción unitario, $\rho(t)$ es la tasa de capturas de la biomasa dado en peso por unidad de tiempo y $e^{-\delta \cdot t}$ es un factor de actualización dado por la tasa de descuento, δ . Para este sistema, la variable de estado es la biomasa, x , y la tasa de captura, h . Hay que tomar en cuenta que para este problema, la biomasa es una cantidad cambia con respecto al tiempo dependiendo de la tasa de crecimiento natural de la biomasa, $T(x)$, como

$$\frac{dx}{dt} = T(x) - \rho(t) . \quad (36)$$

El Lagrangiano, $L \equiv L(t, x, \rho, \dot{x}, \dot{\rho}, \lambda, \dot{\lambda})$, de este sistema se define como

$$L = e^{-\delta \cdot t}(p - c(x))\rho + \lambda(T(x) - \rho - \dot{x}), \quad (37)$$

donde $\lambda \equiv \lambda(t)$ es el multiplicador de Lagrange que se considera dependiente del tiempo.

Considerando el precio unitario como una constante, se obtienen las ecuaciones (junto con la restricción)

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(\lambda) &= -e^{-\delta \cdot t}\rho c'(x) + \lambda T'(x), \\ 0 &= e^{-\delta \cdot t}(p - c(x)) - \lambda, \end{aligned} \quad (38)$$

donde $c'(x) = \frac{dc(x)}{dx}$ y $T'(x) = \frac{dT(x)}{dx}$. El problema se reduce a resolver el sistema de tres ecuaciones.

De esta manera se hace un modelo matemático fundamentado que permite hacer predicciones.

9. Conclusiones

El principio de mínima acción es un método aplicable a diversas áreas del conocimiento. Si bien la idea de que la naturaleza minimizaba sus acciones se plantea en el siglo XVIII, Noether lo generaliza a las diversas áreas de la física.

Inclusive este principio se expande a diversas áreas donde se desea maximizar o minimizar un proceso para predecir sus resultados e inclusive controlarlo.

Referencias

Kosmann-Schwarzbach, Y. (2010). *The Noether theorems. Invariance and conservation laws in the twenty century*. New York: Springer.

Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1994). *Curso de Física Teórica: Mecánica* (2a. Ed ed., Vol. 1).

Barcelona: Reverté.

Noether, E. (1918). *Invariante Variationsprobleme*. *Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu*

Göttingen, Math-phys. Klasse, 235–257.

Ortíz Olvera, J. C. (Septiembre-Octubre de 2011). *Ahorro: un enfoque de control óptimo*.

Economía Informa (370), 1-13.